التمرين الأول

$I]$ حدد الشكل الجبري للأعداد العقدية التالية :

1) $z_1 = 1+2i(1+i)$ 2) $z_2 = (1+2i)(3-i)$ 3) $z_3 = 5+2i-(4+3i)(2-i)$

4) $z_4 = (3-2i)^3$ 5) $z_5 = \dfrac{2}{3-4i}$ 6) $z_6 = \dfrac{3+2i}{2-i}$ 7) $z_7 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

$II]$ حدد العدد z في كل من الحالات التالية : (يكتب z على الشكل الجبري)

$(2+i)z+3+i=0$	$iz+2-i=z$	$(3-i)z-3-i=0$
$\dfrac{2z-i}{z-1}=1+i$	$z-2i\overline{z}-1=0$	$i\overline{z}+(1-i)z-3-i=0$

التمرين الثاني

أحسب معيار العدد Z في الحالات التالية :

1) $Z = 2-3i$ 2) $Z = -\sqrt{3}+3i$ 3) $Z = 3-i\sqrt{7}$ 4) $Z = (1+i)(2-i)(-3+i)$

5) $Z = \left(-\sqrt{3}+i\right)^4$ 6) $Z = \dfrac{\sqrt{3}-i}{4+2i}$ 7) $Z = \left(\sqrt{3}-i\right)-\left(i\sqrt{3}+1\right)i$ 8) $Z = \dfrac{2012+i}{1-2012i}$

التمرين الثالث

حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z في الحالات التالية

① $|z-1+i| = |z+2-3i|$ ② $|z+3-i| = 4$ ③ $|\overline{z}-2| = |iz+1+2i|$ ④ $|2\overline{z}+4-i| = 6$

⑤ $z\overline{z}+z-i(\overline{z}-1) \in \mathbb{R}$ ⑥ $\dfrac{iz-1}{z+1} \in i\mathbb{R}$ ⑦ $(z-2i)(\overline{z}-1) \in \mathbb{R}$ 8) $\dfrac{z-i}{z+i} \in i\mathbb{R}$

التمرين الرابع

$1]$ مثل في المستوى العقدي (P) النقط التالية : $A(2-3i)$ و $B(3+2i)$ و $C(4i)$.

$2]$ أ- حدد z_D لحق النقطة D التي من أجلها يكون الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .

ب- حدد z_K لحق K مركزه $ABCD$.

$3]$ أ- حدد لحق E نقطة تقاطع المستقيم (AB) و المحور الحقيقي.

ب- لحق F نقطة تقاطع المستقيم (AB) و المحور التخيلي.

$4]$ هل النقط $E(3+2i)$ و $F(1+4i)$ و $G(-1+6i)$ مستقيمية ؟ علل جوابك .

التمرين الخامس

ليكن z عددا عقديا غير منعدما . نضع $Z = z+\dfrac{1}{z}$

1) حدد الشكل الجبري للعدد Z في كل حالة من الحالتين : أ- $z=1+i$ ب- $z=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$

2) بين أن : $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad / \quad Z=\overline{Z} \Leftrightarrow \left(z-\overline{z}\right)\left(z\overline{z}-1\right)=0$

3) حدد المجموعة : $\Gamma=\{M\ (z)\ / Z \in \mathbb{R}\}$

التمرين السادس

ليكن z عددا عقديا يخالف i . نضع $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$

1) حدد الشكل الجبري للعدد $f(z)$ من أجل $z=1+2i$

2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z) = -2i$

3) أ- بين أن $z\bar{z}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{f(z)}=f(z)$

ب- استنتج المجموعة (C) للنقط $M(z)$ و التي يكون من أجلها $f(z)$ حقيقي

4) حدد المجموعة (Γ) للنقط $M(z)$ و التي يكون من أجلها $f(z)$ تخيلي

التمرين السابع

حدد الشكل المثلثي للعدد z في الحالات التالية: $(1)\quad z=-1+i \quad ; \quad (2)\quad z=-\sqrt{3}+i$

$(1)\quad z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad (2)\quad z=\sqrt{3}+3i \quad (3)\quad z=(1+i)^5 \quad ; \quad (4)\quad z=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}i\right)^4$

$(1)\quad z=(2-2i)\left(-1-i\sqrt{3}\right) \quad ; \quad (2)\quad z=\frac{2i}{\sqrt{3}-i} \quad (3)\quad z=\sin 2\theta+2i\sin^2\theta \quad ; \quad (4)\quad z=\sin\theta-i\cos\theta$

التمرين الثامن

نعتبر العدد العقدي $z=\sqrt{2}-1+i$

☺ بين أن $z^2=2\left(\sqrt{2}-1\right)(1+i)$

☺ حدد الشكل المثلثي للعدد العقدي $a=1+i$

☺ استنتج الشكل المثلثي للعدد z وحدد $\cos\frac{\pi}{8}\ ;\ \sin\frac{\pi}{8}$

التمرين التاسع

ليكن z عددا عقديا بحيث $z\neq i$ و نضع $Z=\frac{2+iz}{\bar{z}-i}$

1) أحسب Z من أجل $z=2+\frac{1}{2}i$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $Z=2$

3) أ- أكتب $\bar{Z}$ بدلالة z و $\bar{z}$

ب- بين أن $\bar{Z}=-Z \ \Leftrightarrow\ (z+\bar{z})\left(i(z-\bar{z})+1\right)=0 \quad : \quad (\forall z\in\mathbb{C}-\{-i\})$

ج- استنتج (E) مجموعة النقط M ذات اللحق z و التي يكون من أجلها Z عددا تخيليا

4) حدد (D) مجموعة النقط $M\ (z)$ و التي يكون من أجلها $|Z|=1$

5) أ- بين أن $\bar{Z}=Z \ \Leftrightarrow\ z^2+\bar{z}^2-i(z-\bar{z})+4=0 \quad : \quad (\forall z\in\mathbb{C}-\{-i\})$

ب- استنتج (C) مجموعة النقط M ذات اللحق z و التي يكون من أجلها Z عددا حقيقيا

التمرين العاشر

لكل عدد عقدي z يخالف i نضع $Z=\frac{iz}{\bar{z}-i}$

1) أحسب Z من أجل $z=2+3i$

2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $Z=1+2i$

3) أ- بين أن: $\left(\left(z-\frac{1}{2}i\right)\left(\bar{z}+\frac{1}{2}i\right)-\frac{1}{4}=0\right) \Leftrightarrow \left(\bar{Z}=Z\right) \quad (\forall z\in\mathbb{C}-\{i\})$

ب- استنتج مجموعة النقط $M\ (z)$ من المستوى (P) و التي يكون من أجلها Z حقيقي

4) حدد المجموعة (D) للنقط $M\ (z)$ من المستوى (P) و التي يكون من أجلها $|Z|=1$

التمرين الحادي عشر

1) حدد مجموعة النقط $M\ (z)$ والتي يكون من أجلها النقط $M\ (z)\ ,\ N\ (iz)\ ,\ P\ (-1)$ مستقيمية

2) نعتبر النقط $A\ ,\ B\ ,\ C$ التي ألحاقها $a=2i\ ,\ b=\sqrt{3}+i\ ,\ c=\sqrt{3}+3i$ على التوالي

أ- حدد الشكل المثلثي للعدد $\frac{b-a}{c-a}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

ب- تحقق أن $b=c-a$ و استنتج طبيعة الرباعي $OACB$

ج- بين أن c^{2007} عدد حقيقي سالب

التمرين الثاني عشر

التمرين الثاني عشر

نعتبر في المستوى العقدي (P) النقط A , B , C التي ألحاقها على التوالي $a=\sqrt{3}+i$, $b=-2i$ و $c=-2\sqrt{3}$

1) حدد الشكل المثلثي للعددين b , a

2) أ- بين أن : $\frac{b-a}{b-c}=-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC

3) حدد d لحق النقطة D كي يكون $ABCD$ مربع

التمرين الثالث عشر

التمرين الثالث عشر

نعتبر في المستوى العقدي (P) النقط A , B , C التي ألحاقها على التوالي $a=5i$, $b=2+i$ و $c=6+3i$

بين أن $\frac{c-a}{b-a}=1+i$ و استنتج قياسا للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ و بين أن $AC=\sqrt{2}AB$

التمرين الرابع عشر

التمرين الرابع عشر

نعتبر الأعداد $a=i$ ، $b=1+4i$ و $c=4+5i$ ، $d=3+2i$

أ- أحسب $\frac{b-a}{d-a}$ و أحسب $\left|\frac{b-a}{d-a}\right|$ و استنتج طبيعة المثلث ABD

ب- أحسب $\frac{d-b}{c-a}$ و استنتج طبيعة الرباعي

التمرين الخامس عشر

التمرين الخامس عشر

نعتبر النقطتين A ; B ذات اللحق $z_A=\sqrt{3}-i$ و $z_B=1+i\sqrt{3}$ على التوالي

1) حدد الشكل المثلثي للعددين z_A , z_B

2) أحسب $\frac{z_B}{z_A}$ و استنتج طبيعة المثلث OAB و حدد قياسا للزاوية $\left(\overline{OA},\overline{OB}\right)$

3) نعتبر العدد $z_C=z_A+z_B$ و النقطة $C(z_C)$

أ- ما هي طبيعة الرباعي $OACB$

ب- حدد قياسا للزاوية $\left(\overline{OA},\overline{OC}\right)$ و استنتج أن $\arg(z_C)\equiv\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

ج- استنتج قيمة كل من $\sin\frac{\pi}{12}$; $\cos\frac{\pi}{12}$

التمرين السادس عشر

التمرين السادس عشر

نعتبر العدد العقدي $Z=1+\left(\sqrt{2}-1\right)i$ و نضع $\theta\equiv\arg(Z)\ [2\pi]$

1) بين أن $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ (دون حساب θ)

2) أ- بين أن $Z^2=2\left(\sqrt{2}-1\right)(1+i)$

ب- حدد الشكل المثلثي للعدد $u=1+i$ و استنتج أن $\theta=\frac{\pi}{8}$

ج- أستنتج قيمة $\tan\frac{\pi}{8}$